Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

Б. И. АРГУНОВ и Л. А. СКОРНЯКОВ

КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1957

АН
КНИГИ
НИКИТИНА

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 24

Б. И. АРГУНОВ и Л. А. СКОРНЯКОВ

КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957

3-1-11

АННОТАЦИЯ

В настоящей лекции изложены важнейшие конфигурационные теоремы на плоскости и их применение к решению некоторых практических задач. У читателя предполагаются лишь самые элементарные знания по планиметрии и стереометрии. Необходимые сведения о центральной проекции и несобственных элементах пространства приводятся в самой лекции. Лекция будет полезной не только для школьного математического кружка, но и для топографа и геодезиста.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 4
Введение 5
§ 1. Центральное проектирование и несобственные элементы . . 7
§ 2. Теорема Паппа — Паскаля 12
§ 3. Теорема Дезарга 17
§ 4. Некоторые свойства многоугольников 24
§ 5. Задачи 28
§ 6. Об алгебраическом смысле конфигурационных теорем . . . 34
Литература 39

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книжке изложены в элементарной форме некоторые важнейшие конфигурационные теоремы на плоскости, их следствия и применения к изучению свойств фигур и к решению некоторых задач. Мы стремились по возможности сочетать доступность изложения с необходимым уровнем строгости. Помимо основных сведений по планиметрии и стереометрии, здесь привлекаются только понятия центральной проекции и несобственных элементов пространства — понятия, которые следует уже считать составной частью общеобразовательного минимума по математике.

§ 1 содержит необходимые сведения о центральном проектировании и о несобственных точках и прямых.

§§ 2 и 3 посвящены двум важнейшим конфигурационным теоремам — теореме Паппа — Паскаля и теореме Дезарга.

В § 4 рассматриваются конфигурационные свойства многоугольников.

В § 5 приведены задачи и примеры.

В § 6 затронут вопрос об алгебраическом смысле конфигурационных теорем и об общем методе получения теорем этого рода.

В конце книги помещен список литературы, по которой можно глубже изучить вопрос о конфигурационных теоремах.

Авторы надеются, что книга будет доступна учащимся старших классов средней школы и может быть полезной учителю в кружковой работе. Знакомство с конфигурационными теоремами может помочь в работе топографу и геодезисту. Студент педагогического института или университета найдет здесь материал, тесно примыкающий к основному курсу проективной геометрии.

Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков

ВВЕДЕНИЕ

Конфигурационные теоремы — простейшие теоремы геометрии. В них говорится лишь о конечном числе точек и прямых и об их взаимной принадлежности.

Обычно конфигурационная [1]) теорема формулируется так, что из того, что некоторые из рассматриваемых точек принадлежат одной прямой или некоторые из рассматриваемых прямых проходят через одну точку, выводится, что некоторые другие точки располагаются на одной прямой или некоторые другие прямые проходят через одну точку.

Рис. 1.

Вот простейшие примеры конфигурационных теорем:

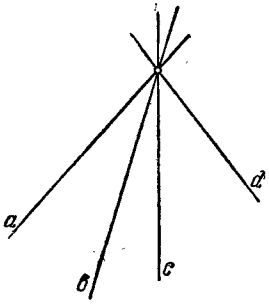

Рис. 2.

1. Если точки A, B, C и D различны, причем точки A, B и C лежат на одной прямой и точки A, B и D лежат на одной прямой, то точки B, C и D также лежат на одной прямой (рис. 1).

2. Если прямые a, b, c и d различны, причем прямые a, b и c проходят через одну точку и прямые a, b и d проходят через одну точку, то и прямые b, c и d также проходят через одну точку (рис. 2).

Из предложений, изучаемых в школьном курсе геометрии, к конфигурационным теоремам близки теоремы о замечательных точках в треугольнике.

---

[1]) Конфигурация (лат. configuratio) — взаимное расположение каких-либо предметов.

Некоторые конфигурационные теоремы были известны еще древним. В новое время они составили основу одной из интереснейших ветвей геометрии — проективной геометрии. Проективная геометрия в свою очередь представляет теоретическую базу учения об изображении пространственных фигур на плоскости — начертательной геометрии.

В последнее десятилетие конфигурационными теоремами заинтересовались алгебраисты. Причины этого до некоторой степени объясняются в последнем параграфе настоящей брошюры.

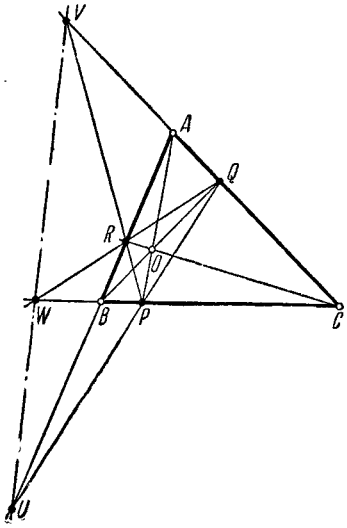

Рис. 3.

Конфигурационные теоремы успешно применяются к изучению свойств многоугольников и к решению задач. Они особенно полезны при решении задач на построение в условиях различных ограничений: при построениях только с линейкой, при построениях на ограниченной части плоскости, при построениях с недоступными точками и т. п.

Начертите треугольник ABC и выберите внутри него точку O. Продолжая прямые, соединяющие вершины треугольника с этой точкой, до пересечения с противоположными сторонами, получите точки P, Q и R (рис. 3). Пусть U — точка пересечения прямых AB и PQ, V — точка пересечения прямых AC и PR, W — точка пересечения прямых BC и QR. Если все эти точки поместились на чертеже, а построение проведено аккуратно, то, приложив линейку, можно убедиться, что точки U, V и W лежат на одной прямой. Выбирайте другие треугольники, меняйте положение точки O — результат будет тот же.

Если окажется, что $BC \parallel QR$, то будет $UV \parallel QR$. Если же случится, что одновременно $BC \parallel QR$ и $AC \parallel PR$, то непременно будет также $AB \parallel PQ$.

Трудно представить, что все эти факты — случайность. По-видимому, здесь имеет место закономерность, должна быть справедлива какая-то теорема. При этом заключение теоремы гласит: «*точки U, V и W лежат на одной прямой*».

Теоремы со сходным заключением уже встречались в школьном курсе: вспомните теоремы о замечательных точках треугольника. Но, в отличие от тех теорем, в условии нашей теоремы ничего не надо говорить о размерах сторон и углов: как в заключении, так и в условии нашей теоремы говорится лишь о взаимном расположении точек и прямых. Такие теоремы называются *конфигурационными*.

Упомянутая здесь конфигурационная теорема читается следующим образом:

Если вершины треугольника PQR лежат соответственно на сторонах треугольника ABC, причем три прямые AP, BQ и CR проходят через одну точку, а прямые AB и PQ, AC и PR, BC и QR пересекаются соответственно в точках U, V, W, то точки U, V, и W лежат на одной прямой.

Чтобы получить возможность доказывать конфигурационные теоремы, нам необходимо предварительно ознакомиться с операцией центрального проектирования и с понятием «несобственных», или «бесконечно удаленных», точек и прямых.

§ 1. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Рассмотрим сначала центральное проектирование в плоскости.

Пусть даны прямая l и точка S вне этой прямой (рис.4). Если точка A такова, что $AS \nparallel l$, то прямая SA пересечет прямую l в некоторой точке A'. Эту точку будем называть *проекцией* точки A. Пусть m — прямая, проходящая через точку S параллельно l. Тогда ясно, что каждая точка B плоскости, не лежащая на прямой m, будет обладать определенной проекцией B'. Таким образом, мы *отображаем* точки плоскости на точки прямой l с помощью точки S. Такое отображение называется *центральным проектированием*, а точка S — *центром* проектирования.

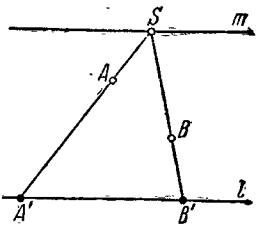

Рис. 4.

Если выбрать какую-либо прямую k, не проходящую через точку S, то центральное проектирование отображает точки прямой k на прямую l. Если $k \nparallel l$, то проекции имеют не все точки прямой k. Точка X на рис. 5 проекции не имеет,

если $SX \parallel l$. Рассматривая рис. 5, иетрудно заметить, что, кроме точки X, исключительной точкой является также точка Y', если $SY' \parallel k$. В самом деле, в отличие от остальных точек прямой l, в точку Y' не проектируется иикакая точка прямой k.

Чтобы предоставить исключительным точкам те же права, что и у остальных, договоримся, что, помимо обычных точек, каждой прямой прииадлежит *несобственная* точка.

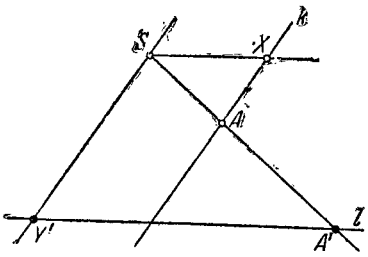

Рис. 5.

Условимся считать, что параллельиые прямые имеют одну и ту же иесобственную точку. Тогда точка X уже получит проекцию: она будет иметь своей проекцией иесобствеиную точку прямой l. В свою очередь точка Y' окажется проекцией иесобствеиной точки прямой k. Заметим, что в случае параллельиости прямых k и l их общая иесобствеиая точка будет своей собствеиной проекцией.

Обратим внимание на следующий факт. Если точка A приближается к точке X слева (на рис. 6 точка A занимает

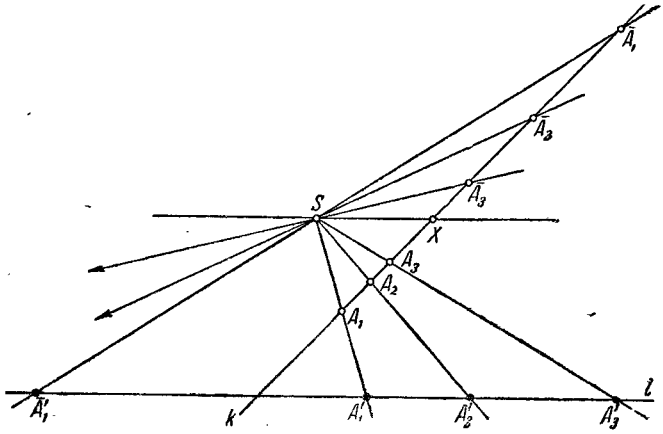

Рис. 6.

положения A_1, A_2, A_3 и т. д.), то ее проекция уходит по прямой l все дальше и дальше вправо. Поэтому несобственную точку иазывают также *бесконечно удаленной*. Заметим еще,

что при приближении точки A к точке X справа (на рис. 6 точка A занимает положения $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ и т. д.) ее проекция уходит по прямой l влево. Поэтому следует считать, что у каждой прямой имеется только одна бесконечно удаленная точка, а сама прямая замкнута.

Прямую, дополненную несобственной точкой, будем называть *проективной* прямой. Условимся считать, что все несобственные точки лежат на одной *несобственной* проективной прямой, которую иногда будем называть также *бесконечно удаленной*. Плоскость, дополненную несобственными точками и несобственной прямой, назовем *проективной плоскостью*.

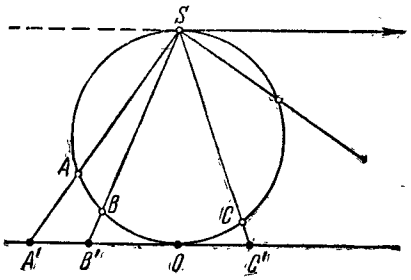

Рис. 7.

Проективная прямая «похожа» на окружность. Действительно, мы можем каждой точке окружности поставить в соответствие точку проективной прямой так, что разным точкам окружности будут соответствовать разные точки проективной прямой. Способ отображения ясен из рис. 7, если добавить, что точка O отображается сама в себя, а S — в бесконечно удаленную точку.

Введение несобственных точек позволяет также включать в общую формулировку исключительные случаи конфигурационных теорем. В случае теоремы, рассмотренной во введении, эти исключительные случаи возникают, если прямые, определяющие какую-либо из точек U, V или W, параллельны. Это означает, что соответствующая точка является несобственной. При этом представляются такие возможные случаи:

а) $BC \parallel QR$, $AC \parallel PR$;
б) $BC \parallel QR$, $AC \nparallel PR$;
в) $BC \parallel QR$, $AB \parallel PQ$;
г) $BC \parallel QR$, $AB \nparallel PQ$;
д) $AB \parallel PQ$, $AC \parallel PR$;
е) $AB \parallel PQ$, $AC \nparallel PR$.

Как было отмечено, в случае б) оказывается, что $UV \parallel QR$. Точка W в этом случае является несобственной. При этом из $UV \parallel QR$ вытекает, что прямая UV проходит через точку W, т. е. точки U, V и W лежат на одной прямой. В случае а) имеем $AB \parallel PQ$, т. е. все три точки U, V и W оказываются

несобственными и, следовательно, лежат на одной несобственной прямой. Аналогичное положение наблюдается и в остальных случаях.

Докажем теперь некоторые основные теоремы о проективных прямых.

Теорема 1. *Через любые две различные точки (обыкновенные или несобственные) проходит одна и только одна проективная прямая.*

Возможны три случая: 1) обе точки обыкновенные; 2) обе точки несобственные; 3) одна точка обыкновенная, другая — несобственная.

В первом случае вспомним, что, согласно аксиомам элементарной геометрии, через две различные точки проходит одна и только одна прямая. Так как несобственная прямая обычных точек не содержит, то она не может соединять данные точки. Для случая 1) теорема доказана.

В случае 2) наши точки соединяются бесконечно удаленной прямой. Так как все остальные прямые содержат только по одной несобственной точке, то никакая из них не может содержать обе данные точки.

В случае 3) обозначим через A обычную точку, а через B — несобственную. Точка B определяется (и может быть задана на чертеже) некоторой прямой k. Проективная прямая l будет соединять точки A и B тогда и только тогда, когда l является обычной прямой, параллельна k и проходит через точку A. Такая прямая, как известно, существует. Из аксиомы о параллельных вытекает ее единственность.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Две различные проективные прямые пересекаются в одной и только в одной точке* (*обычной или несобственной*).

(Прежде чем читать доказательство, попробуйте провести его самостоятельно.)

Для доказательства теоремы 2 заметим прежде всего, что возможны два предположения: 1) обе прямые — обычные; 2) одна прямая — обычная, другая — несобственная. Двух несобственных прямых быть не может, так как, по нашему соглашению, на плоскости существует только одна бесконечно удаленная прямая.

Если две обычные прямые не параллельны, то они имеют одну общую обычную точку. Если же данные прямые параллельны, то они обладают единственной общей несобственной точкой.

Во втором случае единственной общей точкой данных прямых является несобственная точка данной обычной прямой.

Перейдем к рассмотрению центрального проектирования в пространстве.

Пусть даны плоскость π и точка S вне этой плоскости (рис. 8). *Проекцией* точки A на плоскость π назовем точку A' пересечения прямой SA с плоскостью π. Как и в случае плоскости, назовем точку S *центром* проектирования. Заметим, что все точки плоскости τ, параллельной плоскости π и проходящей через точку S, отображаются в несобственные точки плоскости π.

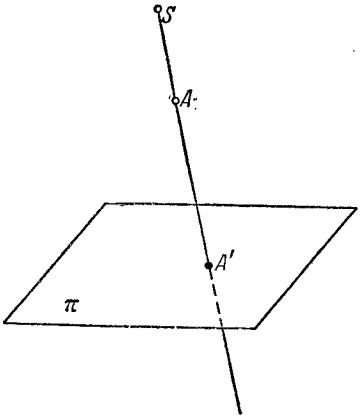

Рис. 8.

Плоскость π, т. е. плоскость, в которой располагаются проекции точек, условимся в дальнейшем называть *плоскостью проекций.*

Теорема 3. *Проекции точек, расположенных на одной прямой, также располагаются на одной прямой.*

Для доказательства допустим, что данные точки A, B, C располагаются на одной прямой a (рис. 9). Тогда все прямые SA, SB, SC располагаются в одной и той же плоскости σ, определяемой точкой S и прямой a. Если плоскости σ и π не параллельны, то точки A', B', C', лежащие как в плоскости σ,

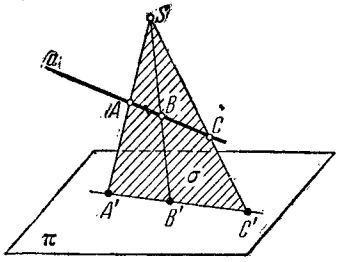

Рис. 9.

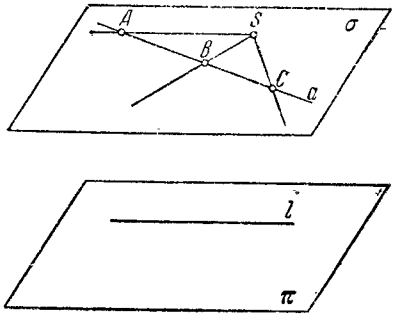

Рис. 10.

так и в плоскости π, располагаются на одной прямой — линии пересечения этих плоскостей. В случае же параллельности плоскостей σ и π (рис. 10) рассмотрим несобственную точку

прямой SA (плоскости σ и π мы, разумеется, считаем *проективными*). Эта несобственная точка должна принадлежать также каждой прямой l, которая лежит в плоскости π и параллельна прямой SA. Следовательно, проекцией точки A будет в этом случае несобственная точка A' плоскости π. Несобственными точками плоскости π окажутся и проекции точек B и C. А так как все несобственные точки плоскости π, по определению, располагаются на одной прямой, то справедливость теоремы 3 установлена и для случая, когда плоскости σ и π параллельны.

§ 2. ТЕОРЕМА ПАППА — ПАСКАЛЯ

Папп Александрийский — древнегреческий математик второй половины III века нашей эры. В сочинении Паппа «Математическое собрание» имеется много отрывков из не дошедших до нас произведений греческих авторов. Поэтому оно является ценным источником по истории древнегреческой математики.

Блез Паскаль (1623—1662)— выдающийся французский математик, физик и философ. Первоначальную математическую подготовку получил под руководством своего отца — известного математика Этьена Паскаля. В шестнадцатилетнем возрасте Паскаль написал свою первую научную работу. В ней была доказана теорема, частным случаем которой является рассматриваемая в этом параграфе теорема Паппа — Паскаля. Этот частный случай, правда, без применения несобственных точек, был известен еще Паппу Александрийскому. Математические интересы Паскаля не ограничивались геометрией. Он занимался конструированием суммирующей машины, написал ряд работ по арифметике, алгебре, теории чисел и теории вероятностей. В частности, он точно определил и применил для доказательства метод полной математической индукции. В физике Паскаль занимался изучением барометрического давления и вопросами гидростатики. Им, например, был открыт основной закон гидростатики, гласящий, что давление на поверхность жидкости, производимое внешними силами, передается жидкостью одинаково во всех направлениях.

Будем называть *n-вершинником* фигуру, образуемую различными n точками плоскости, которые перенумерованы числами $1, 2, \ldots, n$, и n прямыми, которые соединяют точки 1 и 2, 2 и 3, ..., n—1 и n, n и 1. Данные точки называются *вершинами* n-вершинника, а прямые, последовательно соединяющие вершины,— его *сторонами*. Ясно, что n-вершинник отличается от n-угольника только тем, что его сторонами считаются прямые, а не отрезки. Если точки A, B, C, D, E и F в указанном порядке образуют шестивершинник, то вершины A и D, B и E, C и F, т. е. вершины, расположенные через две, называются *противоположными*. Две стороны шестивершинника, соединяющие соответственно противоположные вершины,

называются *противоположными* сторонами шестивершинника. У рассмотренного выше шестивершинника $ABCDEF$ противоположными сторонами являются AB и DE, BC и EF, CD и FA.

Теорема Паппа — Паскаля выражает одно замечательное свойство шестивершинника при некотором специальном расположении его вершин.

Теорема Паппа — Паскаля. *Если вершины шестивершинника лежат поочередно на двух прямых, то точки пересечения противоположных его сторон располагаются на одной прямой.*

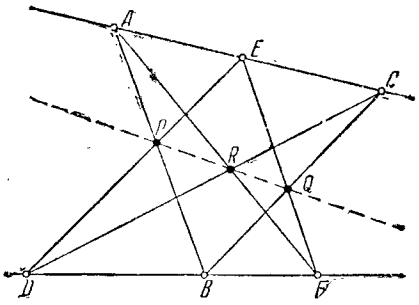

Рис. 11.

Даже если считать, что вершины шестивершинника являются обычными точками, то такая простая формулировка теоремы получается только при условии введения несобственных точек и прямых. Без этого в заключении теоремы пришлось бы говорить в отдельности о следующих трех случаях:

1-й случай. Противоположные стороны шестивершинника попарно пересекаются, и точки их пересечения (точки P, Q и R на рис.11) располагаются на одной прямой.

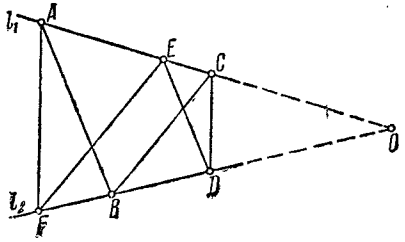

Рис. 12.

2-й случай. Противоположные стороны шестивершинника попарно параллельны (рис. 12).

3-й случай. Две пары противоположных сторон шестивершинника пересекаются в точках P и Q, а стороны третьей пары параллельны прямой PQ (рис. 13).

Несобственные элементы позволяют дать для всех этих трех случаев приведенную выше единую формулировку, так как во втором случае все три точки пересечения противоположных сторон несобственные и поэтому располагаются на несобственной прямой данной плоскости, а в третьем случае несобственная точка пересечения третьей пары противополож-

ных сторон принадлежит прямой PQ, так как параллельным прямым приписывается общая несобственная точка.

Более того, как мы убедимся, теорема Паппа — Паскаля остается справедливой и в том случае, когда какие-либо вершины шестивершинника являются несобственными точками. Разумеется, и для всех этих случаев можно сформулировать теорему без привлечения несобственных точек. Но сколько тогда получилось бы случаев! А для каждого из них надо было бы давать особое доказательство.

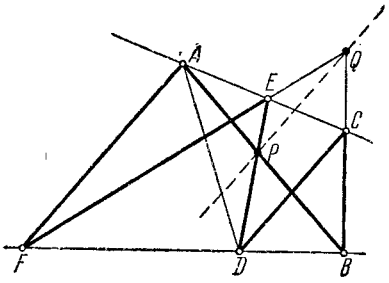

Рис. 13.

Прежде чем приступать к доказательству теоремы Паппа — Паскаля, докажем вспомогательное предложение, которое понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Если на стороне OA угла AOB отложен отрезок OC, а на стороне OB — отрезок OD, причем $OA:OB = OC:OD$, то $AB \parallel CD$* (рис. 14).

Так как в треугольниках AOC и COD угол O является общим, а стороны, между которыми заключен этот угол, пропорциональны, то треугольники подобны. Следовательно, углы OCD и OAD равны, откуда $CD \parallel AB$.

Теперь проведем доказательство теоремы Паппа — Паскаля для второго случая. Пусть дано, что $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$. Требуется доказать, что $AF \parallel CD$. Если прямые l_1 и l_2, на которых расположены вершины шестивершинника, параллельны между собой (рис. 15), то из условия видно, что $BF = CE$ и $BD = AE$, как противоположные стороны параллелограммов. Значит, равны между собой также отрезки AC и DF. Следовательно, четырехугольник $ACDF$ — параллелограмм, т. е. $AF \parallel CD$. Если же прямые l_1 и l_2 пересекаются в некоторой точке O (см. рис. 12), то из рассмотрения подобных треугольников

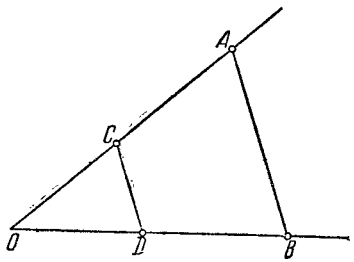

Рис. 14.

получим:

$$OC : OE = OB : OF \qquad \text{и} \qquad OE : OD = OA : OB.$$

Почленное перемножение этих равенств дает: $OC : OD = OA : OF$. Из последнего равенства, ввиду леммы 1, вытекает, что $AF \parallel CD$. Таким образом, показано, что если две пары противоположных сторон шестивершинника, удовлетворяющего условиям теоремы Паппа—Паскаля, параллельны, то стороны третьей пары также параллельны между собой.

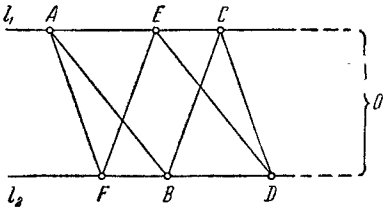

Рис. 15.

Докажем еще одно вспомогательное предложение.

Лемма 2. *Какова бы ни была прямая l в плоскости σ, существуют такие центр проектирования S и плоскость проекций π, что прямая l проектируется в несобственную прямую плоскости π. При этом плоскость π параллельна плоскости τ, проходящей через точку S и прямую l.*

Для доказательства изберем в качестве центра проектирования произвольную точку S, не лежащую в плоскости σ (рис. 16). Через точку S и прямую l проведем плоскость τ (возможность, что прямая l является несобственной, не должна нас смущать, ибо в этом случае плоскость, проходящая через S и l, есть плоскость, проходящая через точку S параллельно плоскости σ). Пусть π — некоторая плоскость, параллельная τ и не проходящая через точку S. Если точка A принадлежит прямой l, то прямая SA лежит в плоскости τ и, следовательно, параллельна плоскости π. Значит, A проектируется в несобственную точку плоскости π. Так как это справедливо для любой точки на прямой l, то выбранные нами точка S и плоскость π удовлетворяют заключению леммы.

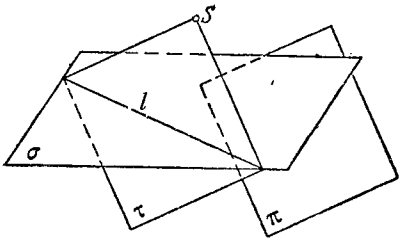

Рис. 16.

Вернемся к доказательству теоремы Паппа — Паскаля.

Обозначим через σ плоскость, в которой расположен данный шестивершинник, а через l — прямую PQ (рис. 17). Согласно лемме 2, найдутся такие центр проектирования S и плоскость проекций π, что проекцией прямой l служит несоб-

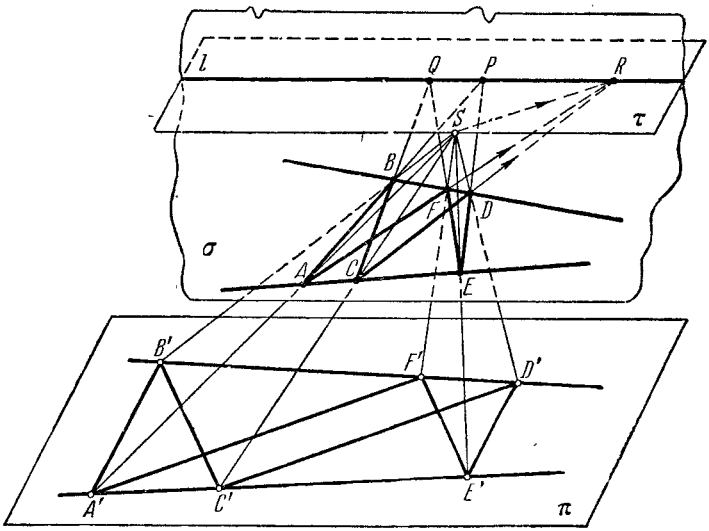

Рис. 17.

ственная прямая плоскости π. При этом плоскость τ, определяемая точкой S и прямою PQ, параллельна плоскости π. Обозначим через A', B', C', D', E', F' проекции вершин шестивершинника, а через P', Q' и R' — соответственно проекции точек P, Q и R. Так как точка P принадлежит прямым AB и DE, то из теоремы 3 вытекает, что точка P' принадлежит прямым $A'B'$ и $D'E'$. Такими же рассуждениями можно показать, что Q' принадлежит прямым $B'C'$ и $E'F'$, а R' — прямым $C'D'$ и $A'F'$. Но P' и Q' — несобственные точки. Следовательно, $A'B' \parallel D'E'$ и $B'C' \parallel E'F'$. Кроме того, из условий нашей теоремы, ввиду теоремы 3, получается, что как точки A', C' и E', так и точки B', F' и D' лежат соответственно на одной прямой. Как уже доказано, отсюда вытекает, что $C'D' \parallel A'F'$. Это означает, что точка R' лежит на несобственной прямой плоскости π. Но все точки несобственной прямой этой плоскости по построению являются проекциями точек прямой l, лежащей на плоскости σ.

Следовательно, точка R принадлежит прямой l, т. е. точки P, Q и R лежат на одной прямой. Теорема доказана.

Из теоремы Паппа — Паскаля легко выводится следствие, называемое иногда *теоремой Брианшона* (1785—1864):

Теорема 4. *Если стороны шестивершинника проходят последовательно через две данные точки, то три прямые, соединяющие противоположные его вершины, сходятся в одной точке.*

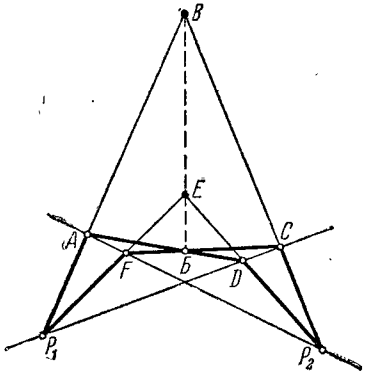

Рис. 18.

Действительно, пусть A, B, C, D, E, F — последовательные вершины шестивершинника, причем стороны AB, CD и EF проходят через точку P_1, а стороны BC, DE и AF — через точку P_2 (рис. 18). Пусть $Б$ — точка пересечения прямых AD и CF. Надо доказать, что прямая BE проходит через точку $Б$, или, иначе говоря, что точки $Б$, B и E располагаются на одной прямой.

Но это непосредственно следует из теоремы Паппа — Паскаля, если применить ее к шестивершиннику ADP_2CFP_1. При этом не следует только забывать, что стороной шестивершинника является прямая, а не отрезок.

§ 3. ТЕОРЕМА ДЕЗАРГА

Жирар Дезарг (1593-1662; по другим данным, 1591-1661)— выдающийся французский математик, заложивший основы проективной и начертательной геометрии. Дезаргом было впервые введено в геометрию рассмотрение несобственных точек и прямых. При жизни ученого его идеи смогли понять и оценить только наиболее выдающиеся математики того времени: Декарт, Ферма и Б. Паскаль. Только в начале XIX века идеи Дезарга начали завоевывать всеобщее признание. Будучи по образованию военным инженером, Дезарг интересовался точным математическим обоснованием практических операций. Этим вопросам посвящены сочинения Дезарга о резьбе по камню и о солнечных часах.

Перейдем теперь ко второй важнейшей из конфигурационных теорем, известной под названием теоремы Дезарга.

Теорема Дезарга. *Если два трехвершинника ABC и $A'B'C'$ расположены на плоскости таким образом, что*

прямые AA′, BB′ и CC′, соединяющие их соответственные вершины, сходятся в одной точке O, то точки пересечения соответственных [1]) ***сторон этих трехвершинников располагаются на одной прямой*** (рис. 19).

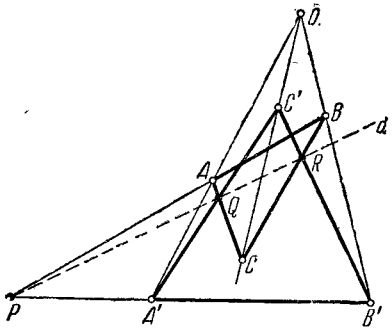

Рис. 19.

Прежде чем доказывать теорему Дезарга, заметим, что теорема, сформулированная во введении, является частным случаем теоремы Дезарга. Действительно, легко видеть, что рассмотренные там треугольники ABC и PQR удовлетворяют условиям теоремы Дезарга.

Переходим к доказательству теоремы Дезарга. Пусть AB и $A'B'$ пересекаются в точке P, AC и $A'C'$ — в точке Q, BC и $B'C'$ — в точке R. Надо доказать, что точки P, Q и R располагаются на одной прямой.

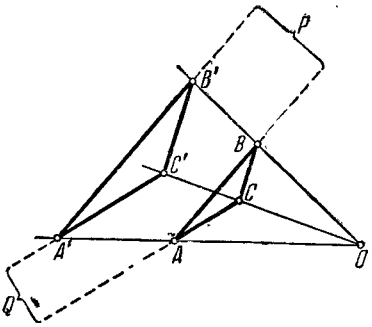

Рис. 20.

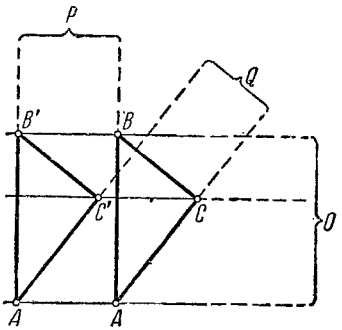

Рис. 21.

Сначала допустим, что среди точек P, Q и R две, например точки P и Q, являются несобственными. Тогда $AB \parallel A'B'$ и $AC \parallel A'C'$. Если точка O является обычной (рис. 20), то из подобия треугольников AOB и $A'OB'$ вытекает, что $OB : OB' = OA : OA'$,

[1]) Вершины A и A', B и B', C и C' считаются соответственными по определению. Стороны называются соответственными, если они соединяют соответственные вершины.

а из подобия треугольников AOC и $A'OC'$ вытекает, что $OA:OA' = OC:OC'$. Отсюда $OB:OB' = OC:OC'$. Ввиду леммы 1, доказанной на стр. 14, из последнего равенства следует, что $BC \parallel B'C'$, т. е. точка R также является несобственной. Если же точка O несобственная (рис. 21), то мы имеем $AA' \parallel BB' \parallel CC'$. Поэтому четырехугольники $AA'B'B$ и $AA'C'C$

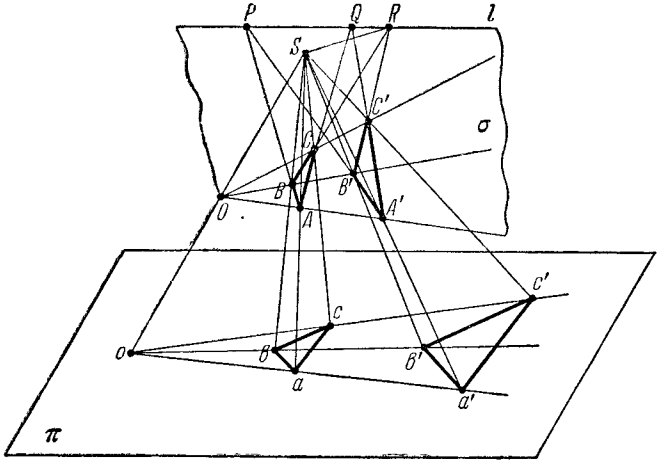

Рис. 22.

являются параллелограммами. Отсюда $BB' = AA'$ и $AA' = CC'$. Следовательно, отрезки BB' и CC' равны и параллельны, что влечет $BC \parallel B'C'$. Таким образом, если точки P и Q являются несобственными, то точка R также оказывается несобственной, т. е. точки P, Q и R лежат на одной несобственной прямой. Для случая, когда точки P и Q несобственные, теорема Дезарга доказана.

Теперь допустим, что среди точек P, Q и R, две, например точки P и Q, являются обыкновенными (рис. 22). Обозначим через σ плоскость, в которой расположены данные трехвершинники, а через l — прямую PQ. Согласно лемме 2, доказанной на стр. 15, найдутся такие центр проектирования S и плоскость проекций π, что проекцией прямой l служит несобственная прямая плоскости π. Будем обозначать проекции точек, которые обозначены большими буквами, соответствующими малыми буквами. Так как точка P принадлежит прямым AB и $A'B'$, то из теоремы 3 (стр. 11) вытекает, что точка p принадлежит прямым ab и $a'b'$. Такими же рассуждениями можно показать, что q принадлежит прямым ac и $a'c'$, r — пря-

мым bc и $b'c'$, а o — прямым aa', bb' и cc'. Кроме того, поскольку p и q — несобственные точки, мы имеем $ab \parallel a'b'$ и $ac \parallel a'c'$. Как уже доказано, отсюда следует, что $bc \parallel b'c'$. Это означает, что точка r лежит на несобственной прямой плоскости π. Но

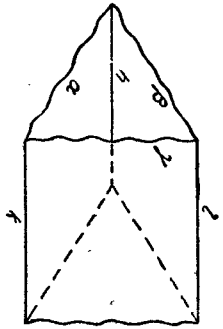

Рис. 23.

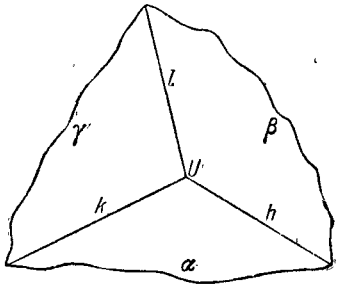

Рис. 24.

все точки этой несобственной прямой по построению являются проекциями точек прямой l. Следовательно, точка R принадлежит прямой l, т. е. точки P, Q и R лежат на одной прямой.

Другие возможные предположения относительно точек P, Q и R могут отличаться только обозначениями, так как эти точки совершенно равноправны. Поэтому мы можем считать, что теорема Дезарга доказана полностью.

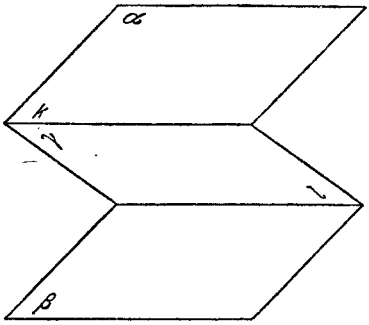

Рис. 25.

Интересно заметить, что доказательство теоремы Дезарга может быть проведено без привлечения теории подобия. Но тогда значительно шире приходится привлекать стереометрию. Проведем это доказательство. Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3. *Пусть α, β и γ — три различные плоскости, причем линией пересечения плоскостей α и β служит прямая h, линией пересечения плоскостей α и γ — прямая k, а линией пересечения плоскостей β и γ — прямая l. Если прямые h, k и l попарно различны, то они непременно имеют единственную общую точку.*

Для доказательства рассмотрим прямые h и k. Возможны такие случаи: 1) все три прямые являются обычными и $h \parallel k$ (рис. 23); 2) все

три прямые являются обычными, а прямые h и k имеют обычную общую точку U (рис. 24); 3) какая-либо из трех прямых является несобственной (рис. 25) (несобственной может быть не более как одна из прямых h, k и l, так как плоскость содержит только одну несобственную прямую).

В школьном курсе геометрии доказывается такая теорема: если данная прямая параллельна какой-нибудь прямой, расположенной в некоторой плоскости, то данная прямая параллельна этой плоскости. Поэтому в первом случае прямая k должна быть параллельной плоскости β (рис. 23). Таким образом, плоскость γ проходит через прямую k, параллельную плоскости β. Как известно из школьного курса, отсюда следует, что линия пересечения плоскостей β и γ, т. е. прямая l, параллельна прямой k. Таким образом, $h \parallel k \parallel l$, и, следовательно, эти прямые имеют единственную общую несобственную точку U.

Во втором случае заметим, что, поскольку точка U лежит на прямой h, эта точка принадлежит плоскости β. Но точка U лежит также на прямой k и, следовательно, принадлежит плоскости γ. Значит, точка U является общей точкой плоскостей β и γ и поэтому должна принадлежать линии пересечения этих плоскостей — прямой l. Таким образом, и во втором случае справедливость нашей леммы доказана.

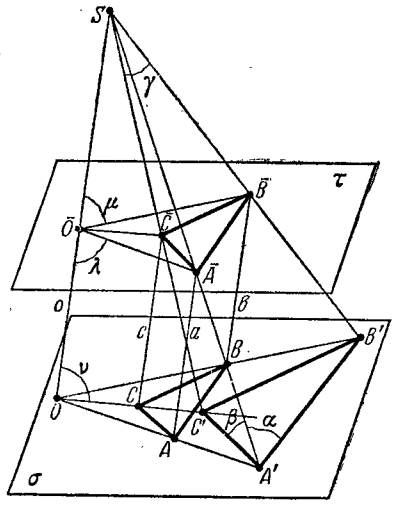

Рис. 26.

Переходя к рассмотрению третьего случая, допустим, что h является несобственной прямой (если несобственной является какая-либо другая прямая из трех рассматриваемых прямых h, k и l, то рассуждаем аналогично). Тогда $\alpha \parallel \beta$ (рис. 25). По условию как k, так и l являются обычными прямыми, т. е. γ пересекает и плоскость α и плоскость β. Из школьного курса известно, что, поскольку $\alpha \parallel \beta$, эти линии пересечения должны быть параллельными, т. е. $k \parallel l$.

Общая несобственная точка U прямых k и l, разумеется, лежит на несобственной прямой плоскости α, т. е. на прямой h. Таким образом, и в третьем случае наши прямые имеют единственную общую точку U. Лемма 3 полностью доказана.

Приступим к новому доказательству теоремы Дезарга. Доказательство надо провести только для случая, когда среди точек P, Q и R две являются несобственными. Как было показано, для других случаев теорему Дезарга можно вывести из этого без привлечения теории подобия. Допустим, что несобственными являются точки P и Q.

Предположим сначала, что точка O — обыкновенная. Обозначим через σ плоскость, в которой расположены данные трехвершинники (рис. 26.). Проведем плоскость τ, параллельную плоскости σ. Далее

проведем через точку A прямую a, не принадлежащую плоскости σ. Пусть прямые b, c и o параллельны a, причем b проходит через точку B, c — через точку C, а o — через точку O. Прямые a, b, c и o пересекают плоскость τ соответственно в точках $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ и $\overline{O}$. Прямые AB и $\overline{A}\overline{B}$ являются линиями пересечения плоскости, проходящей через прямые a и b, с параллельными плоскостями σ и τ. Следовательно, $AB \parallel \overline{A}\overline{B}$. По той же причине $AC \parallel \overline{A}\overline{C}$, $BC \parallel \overline{B}\overline{C}$, $OA \parallel \overline{O}\overline{A}$, $OB \parallel \overline{O}\overline{B}$ и $OC \parallel \overline{O}\overline{C}$. Последние соотношения доказывают существование следующих плоскостей:

λ, проходящей через точки O, A, $\overline{O}$ и $\overline{A}$

μ, проходящей через точки O, B, $\overline{O}$ и $\overline{B}$,

ν, проходящей через точки O, C, $\overline{O}$ и $\overline{C}$.

Так как по условию теоремы $AB \parallel A'B'$ и $AC \parallel A'C'$, то из $AB \parallel \overline{A}\overline{B}$ вытекает $A'B' \parallel \overline{A}\overline{B}$, а из $AC \parallel \overline{A}\overline{C}$ — $A'C' \parallel \overline{A}\overline{C}$. Поэтому мы можем рассматривать также плоскости

α, проходящую через точки A', B', $\overline{A}$ и $\overline{B}$,

β, проходящую через точки A', C', $\overline{A}$ и $\overline{C}$.

Плоскости α, λ, μ и прямые $A'\overline{A}$, $B'\overline{B}$, $O\overline{O}$ удовлетворяют условиям леммы 3. Следовательно, прямые $A'\overline{A}$, $B'\overline{B}$ и $O\overline{O}$ имеют общую точку S. Лемму 3 можно применить также к плоскостям β, μ, ν и прямым $A'\overline{A}$, $C'\overline{C}$, $O\overline{O}$. Значит, общая точка существует и у этих прямых. Но, как показано, общей точкой прямых $A'\overline{A}$ и $O\overline{O}$ является точка S. Следовательно, прямая $C'\overline{C}$ также проходит через точку S. Обозначим через γ плоскость, проходящую через точки S, B' и C'. Ясно, что точки $\overline{B}$ и $\overline{C}$ расположены в этой плоскости. Следовательно, плоскость γ пересекает плоскость σ по прямой $B'C'$, а плоскость τ — по прямой $\overline{B}\overline{C}$. Так как $\sigma \parallel \tau$, то $B'C' \parallel \overline{B}\overline{C}$. Но раньше было установлено, что $\overline{B}\overline{C} \parallel BC$. Значит, $B'C' \parallel BC$, что и требовалось доказать.

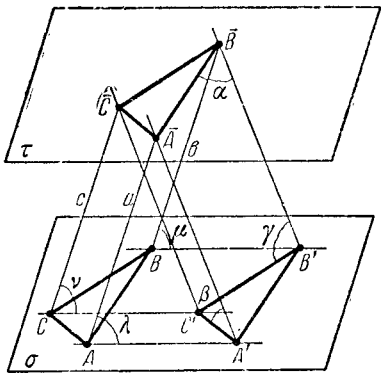

Рис. 27.

Теперь допустим, что точка O несобственная (рис. 27). Доказательство приходится несколько изменить, так как в этом случае нельзя провести через точку O прямую o, параллельную прямой a. Пусть, как и ранее, $AB \parallel A'B'$ и $AC \parallel A'C'$, но, кроме того, $AA' \parallel BB' \parallel CC'$. Надо доказать, что $BC \parallel B'C'$. Опять обозначим через σ плоскость, в которой лежат данные трехвершинники, а через τ — какую-либо плоскость, параллельную плоскости σ и отличную от нее. Пусть по-прежнему a, b и c — три параллельные прямые, проведенные соответственно через точки A, B и C и пересекающие плоскость τ в точках $\overline{A}$, $\overline{B}$

и $\overline{C}$. Как и раньше, стороны трехвершинников ABC и $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ соответственно параллельны, а $\overline{AB} \parallel A'B'$ и $\overline{AC} \parallel A'C'$. Обозначим через λ плоскость $A\overline{A}A'$, через μ — плоскость $B\overline{B}B'$, через ν — плоскость $C\overline{C}C'$. Обозначения α, β и γ пусть сохраняют прежний смысл. Ясно, что плоскость α пересекает плоскости λ и μ по параллельным прямым, в то время как линия пересечения плоскостей λ и μ является несобственной прямой, которую мы обозначим через p. Поэтому плоскости α, λ и μ находятся в условиях третьего случая леммы 3. Следовательно, прямые $A'\overline{A}$, $B'\overline{B}$ и p имеют общую (несобственную) точку S. Применяя лемму 3 к плоскостям β, λ и μ, точно так же установим, что прямые $A'\overline{A}$, $C'\overline{C}$ и p имеют общую точку S'. Но так как прямые $A'\overline{A}$ и p имеют единственную общую точку (см. теорему 2 из § 1), то точки S и S' совпадают. Точки S, B' и C' определяют плоскость γ, в которой лежат также точки $\overline{B}$ и $\overline{C}$. Прямые $B'C'$ и $\overline{B}\overline{C}$ должны быть параллельными, так как это — линии пересечения плоскости γ с параллельными плоскостями σ и τ. А так как $\overline{B}\overline{C} \parallel \overline{BC}$, то и $B'C' \parallel BC$, что и требовалось доказать.

Покажем еще, что теорема Дезарга может быть выведена из теоремы Паппа — Паскаля также без привлечения теории подобия. Как и выше, доказательство достаточно провести для случая, когда точки P и Q несобственные.

Пусть (рис. 28) дано, что три прямые AA', BB' и CC' сходятся в одной точке O и что $AB \parallel A'B'$ и $AC \parallel A'C'$. Требуется доказать, что $BC \parallel B'C'$. Проведем через A прямую, параллельную OB, и пусть она пересекается с прямой $A'C'$ в точке L, а с прямой OC — в точке M. Обозначим буквой N пересечение прямой AB с прямой $B'L$ и соединим точку N с точками O и M. Применяя теорему Паппа — Паскаля, к шестивершиннику $ONALA'B'$ и пользуясь тем, что по условию $AN \parallel A'B'$, а по построению $AL \parallel B'O$, найдем, что $ON \parallel LA'$ и, следовательно, $ON \parallel CA$. В шестивершиннике $ONMACB$ по доказанному имеет место $ON \parallel AC$, а по предположению $AM \parallel OB$. Поэтому, ввиду теоремы Паппа — Паскаля, должно быть и $MN \parallel BC$. Наконец, замечаем, что шестивершинник $ONMLC'B'$ также удовлетворяет условию теоремы Паппа — Паскаля, причем $ON \parallel LC'$ по доказанному, а $ML \parallel B'O$ по построению. Следовательно, $MN \parallel B'C'$. Но мы уже установили, что $MN \parallel BC$. Поэтому $BC \parallel B'C'$, что и требовалось доказать.

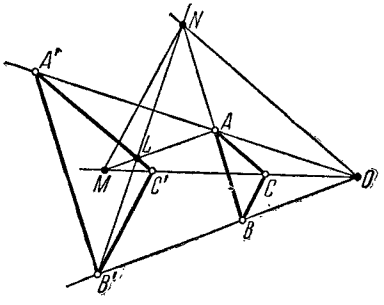

Рис. 28.

Заметим, что без применения пространственных соображений или теории подобия доказать теорему Дезарга нельзя. Это может быть строго доказано.

Справедливо также предложение, обратное теореме Дезарга.

Теорема 5. *Если два трехвершинника ABC и $A'B'C'$ расположены на плоскости таким образом, что точки*

пересечения их соответственных сторон располагаются на одной прямой, то прямые AA', BB' и CC', соединяющие соответственные вершины этих трехвершинников, сходятся в одной точке.

Для доказательства обратимся к рис. 19. Пусть известно, что точки P, Q и R расположены на одной прямой, и требуется доказать, что прямая CC' проходит через точку O пересечения прямых AA' и BB'. Применим теорему Дезарга к трехвершинникам $AA'Q$ и $BB'R$, считая соответственными вершины A и B, A' и B', Q и R. Тогда прямые, соединяющие соответственные вершины этих трехвершинников, сходятся в одной точке P. Следовательно, по теореме Дезарга, точки пересечения их соответственных сторон AA' и BB', AQ и BR, $A'Q$ и $B'R$, т. е. точки O, C и C', должны расположиться на одной прямой. Теорема доказана.

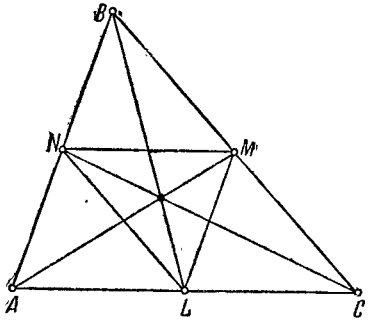

Рис. 29.

Известная теорема о пересечении медиан треугольника в одной точке представляет непосредственное следствие теоремы 5. В самом деле, если L, M и N — середины сторон треугольника ABC (рис. 29), то стороны трехвершинников ABC и MNL, ввиду теоремы о средней линии треугольника, соответственно параллельны, т. е. встречаются на одной несобственной прямой. А отсюда, согласно теореме 5, следует, что прямые AM, BL и CN, т. е. медианы данного треугольника, должны сходиться в одной точке.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОУГОЛЬНИКОВ

В этом параграфе с помощью теоремы Паппа — Паскаля и Дезарга будут установлены некоторые свойства многоугольников.

Теорема 6. *Пусть* (рис. 30) *$ABCD$ — произвольный четырехвершинник, E — точка пересечения его противоположных сторон AB и CD, F — точка пересечения диагоналей AC и BD, M — точка пересечения прямой EF со стороной AD. Тогда точка P, в которой пересекаются прямые AB*

и CM, точка Q, в которой пересекаются прямые BM и CD, и точка R, в которой пересекаются стороны AD и BC, располагаются на одной прямой.

Для доказательства рассмотрим трехвершинники *AED* и *CMB*. Прямые *AC*, *EM* и *BD* сходятся в одной точке *F* (см. табл. 1). Соответственные стороны этих трехвершинников пересекаются в точках *P*, *Q* и *R*. Ввиду теоремы Дезарга, эти точки располагаются на одной прямой, что и требовалось доказать.

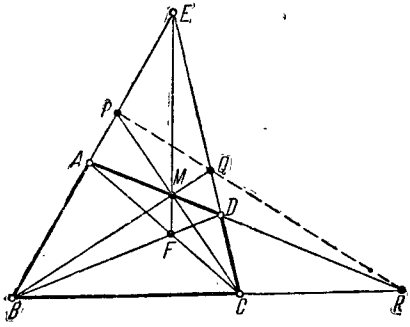

Рис. 30.

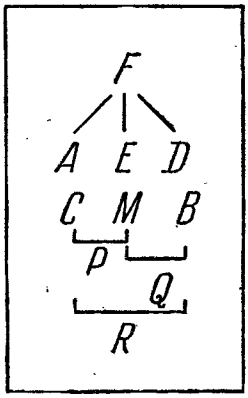

Табл. 1.

Следствие. *Прямые, соединяющие концы основания трапеции или параллелограмма с серединой противоположной стороны, пересекают боковые стороны в точках, расположенных на прямой, параллельной основанию.*

В самом деле, если *ABCD* — трапеция с основаниями *AD* и *BC* (рис. 31), то, как известно, точка *M*, построенная, как указано в теореме 6, располагается в середине отрезка *AD*. С другой стороны, точка *R* пересечения прямых *AD* и *BC* в этом случае бесконечно удалена, так что прямая *PQ*, которая должна пройти через эту точку, будет параллельна прямым *AD* и *BC*.

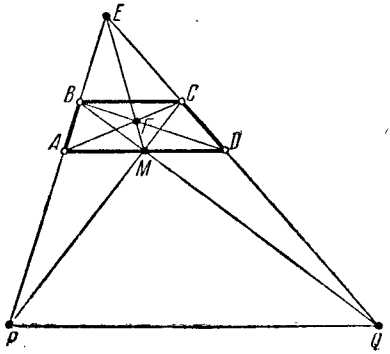

Рис. 31.

Если $ABCD$ не трапеция, а параллелограмм, то рассуждение не меняется. Только в этом случае точка E оказывается несобственной.

Теорема 7. *Пусть $ABCDE$ — произвольный пятивершинник, F — точка пересечения несмежных его сторон AB и CD, M — точка пересечения диагонали AD с прямою EF. Тогда точка P пересечения стороны AE с прямою BM, точка Q пересечения стороны DE с прямою CM и точка R пересечения стороны BC с диагональю AD располагаются на одной прямой* (рис. 32).

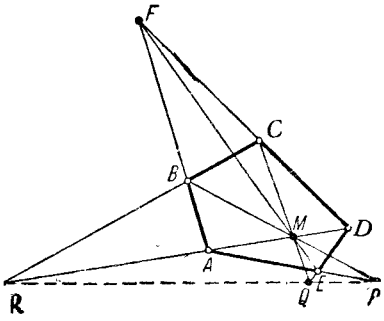

Рис. 32.

Для доказательства достаточно заметить, что трехвершинники AED и BMC удовлетворяют условиям теоремы Дезарга, так как прямые AB, EM и DC сходятся в одной точке F. Отсюда непосредственно следует, что точки P, Q и R расположатся на одной прямой (см. табл. 2).

Теорема 8. *Пусть $ABCDE$ — произвольный пятивершинник, F — точка пересечения двух его несмежных сторон AB и CD, M — точка пересечения других двух несмежных сторон AE и BC, H — точка пересечения диагоналей AD и*

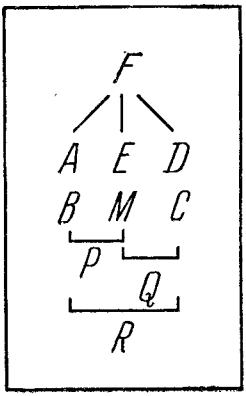

Табл. 2.

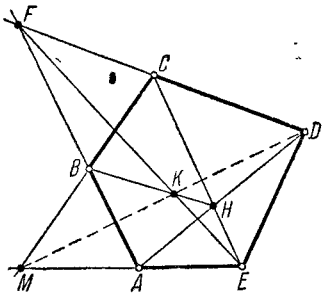

Рис. 33.

CE, *K* — *точка пересечения прямых EF и BH. Тогда прямая DK проходит через точку M* (рис. 33).

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что шестивершинник *AEFCBH* удовлетворяет условиям теоремы Паппа — Паскаля. При этом стороны *AE* и *BC* пересекаются в точке *M*, стороны *EF* и *BH* — в точке *K*, стороны *FC* и *HA* — в точке *D*. Следовательно, точки *M*, *K* и *D* лежат на одной прямой, т. е. прямая *DK* проходит через точку *M*. Теорема доказана.

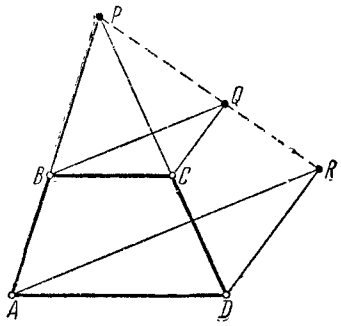

Рис. 34.

Теорема 9. *Если через концы боковых сторон трапеции* (*или параллелограмма*) *провести пары параллельных прямых, то прямые, выходящие из концов одного и того же основания, и боковые стороны трапеции пересекутся в трех точках, расположенных на одной прямой* (рис. 34).

Для доказательства достаточно убедиться, что точки *P*,

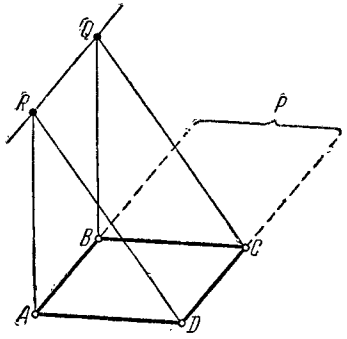

Рис. 35.

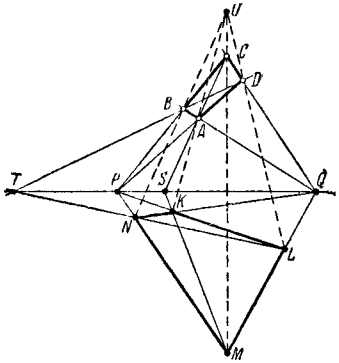

Рис. 36.

Q и *R* расположены на одной прямой. Стороны трехвершинников *BCQ* и *ADR* соответственно параллельны, т. е. точки пересечения их соответственных сторон расположены на одной несобственной прямой. Согласно теореме 5, прямые *AB*, *DC* и *RQ* должны поэтому сходиться в одной точке. Следовательно, прямая *QR* пройдет через точку *P*. Теорема доказана. (Заме-

тим, что если $ABCD$ — параллелограмм, то точка P — несобственная, $QR \parallel AB$ (рис. 35).)

Приведем пример еще более сложной конфигурационной теоремы.

Теорема 10. *Пусть P и Q — точки пересечения противоположных сторон четырехвершинника $ABCD$* (рис. 36),

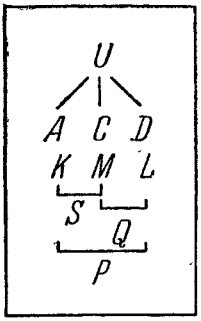

Табл. 3.

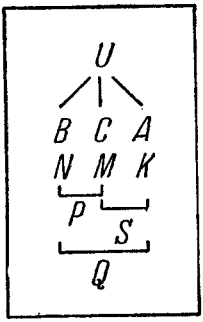

Табл. 4.

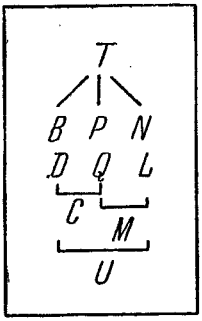

Табл. 5.

S — точка пересечения прямых AC и PQ, T — точка пересечения прямых BD и PQ. Пусть, далее, четырехвершинник $KLMN$ таков, что его противоположные стороны пересекаются в точках P и Q, а диагональ проходит через точку S. Тогда диагональ LN проходит через точку T.

Для доказательства проведем прямые AK, DL, CM и BN. Трехвершинники ACD и KML удовлетворяют условиям теоремы 5 (см. табл. 3). Следовательно, прямые AK, CM и DL сходятся в одной точке U. Теорему 5 можно применить также к трехвершинникам BCA и NMK (табл. 4). Поэтому прямые BN, CM и AK также сходятся в точке U. Теперь можно применить теорему 5 к трехвершинникам BPN и DQL (табл. 5). Следовательно, прямые BD, PQ и NL сходятся в точке T. Теорема 10 доказана.

§ 5. ЗАДАЧИ

Существует много задач, которые требуют для своего решения привлечения конфигурационных теорем. Конфигурационные теоремы особенно полезны для решения задач на построение, в которых встречаются так называемые «недоступные» точки или прямые.

Понятия о недоступных элементах возникли из практических вопросов. Если чертежник сталкивается с тем, что нанесенные им на планшет прямые a и b встречаются за пределами планшета (рис. 37), то точка их пересечения, хотя она и существует, не может быть использована для применения к ней тех или иных чертежных инструментов. В геодезической практике та или иная точка может оказаться недоступной для измерителя потому, например, что она расположена в заболоченной местности или находится над поверхностью земли. Недоступная точка всегда возникает как пересечение каких-то прямых, проведенных на чертеже или указанных на местности путем визирования или путем провешивания. В смысле геометрических построений недоступная точка характеризуется тем, что в ней нельзя установить ножку циркуля, к ней нельзя приложить линейку.

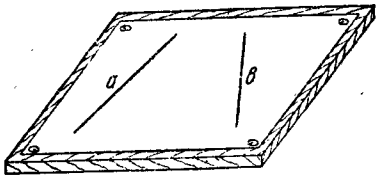

Рис. 37.

При графических работах с приборами может случиться, что какая-либо прямая должна пройти по месту, на котором стоит прибор, не допускающий перемещения (пантограф, планиметр). В условиях геодезических работ часто оказывается практически невозможным установить вехи вдоль некоторой прямой или пройти по ней с рулеткой или мерной лентой.

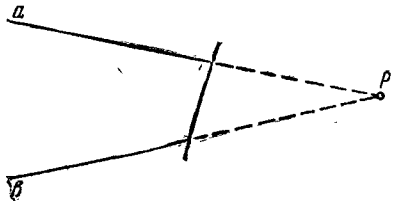

Рис. 38.

Разнообразные, возникающие на практике случаи появления недоступных точек и прямых допускают следующее математическое описание.

Данной *недоступной точкой* мы будем называть точку, определяемую двумя данными пересекающимися прямыми, причем в процессе данной задачи не разрешается пользоваться для построений самой точкой пересечения этих прямых. Недоступную точку P, определяемую прямыми a и b (рис. 38), будем обозначать $P\ (a, b)$.

Данной *недоступной прямой* мы будем называть прямую, которая определена двумя данными точками (безразлично,

доступными или недоступными), причем ие разрешается пользоваться для построений самой этой прямой. Недоступную прямую p, определяемую точками A и B, будем обозначать $p\,(A, B)$.

Приведем некоторые примеры решения задач с недоступными элементами с помощью привлечения конфигурационных теорем. Конфигурационные теоремы позволяют решать такого рода задачи на построение с применением только линейки, что чрезвычайно полезно для геодезии, где нет ничего похожего на циркуль.

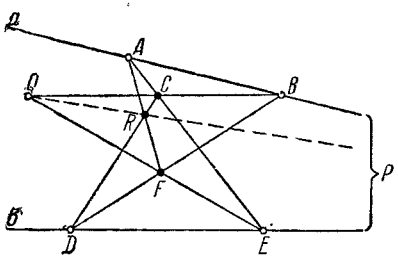

Рис. 39.

Задача 1. Даны: (обыкновенная) точка Q и недоступная точка $P\,(a, b)$. Провести прямую PQ.

1-й способ решения (с помощью теоремы Паппа — Паскаля). Возьмем произвольно на прямой a точки A и B, а точки D и E — произвольно на прямой b (рис. 39). Пусть C — точка пересечения прямых AE и BQ; это мы будем условно записывать так: $C \equiv AE \times BQ$. Пусть далее (в указанных условных обозначениях) $F \equiv BD \times EQ$, $R \equiv AF \times CD$. Из теоремы Паппа — Паскаля, применеиной к шестивершиннику $ABCDEF$, следует, что прямая QR пойдет через точку P, т. е. совпадет с прямою PQ. Следовательно, для решения задачи достаточно соединить посредством линейки точки Q и R.

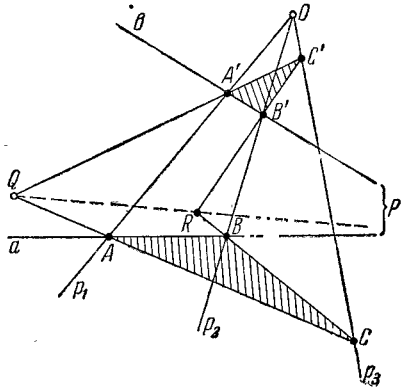

Рис. 40.

2-й способ решения (с помощью теоремы Дезарга). Пусть O (рис. 40) — произвольная точка, p_1, p_2 и p_3 — три произвольные прямые, проходящие через точку O. Обозначим $a \times p_1 \equiv A$, $b \times p_1 \equiv A'$, $a \times p_2 \equiv B$, $b \times p_2 \equiv B'$. Пусть, далее, $AQ \times p_3 \equiv C$, $A'Q \times p_3 \equiv C'$ и, наконец, $BC \times B'C' \equiv R$. Рассматривая треугольники ABC и $A'B'C'$, за-

метим, что по теореме Дезарга точки P, Q и R располагаются на одной прямой. Поэтому искомая прямая совпадает с прямой QR.

Задача 2. Даны: (обыкновенная) прямая q и недоступная прямая p (A, B). Построить точку пересечения этих прямых.

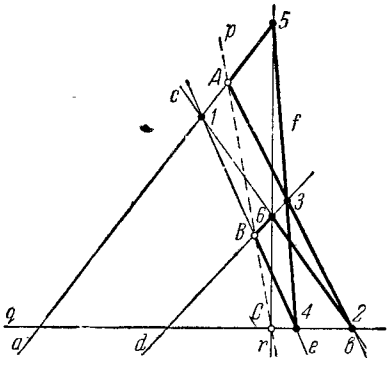

Рис. 41.

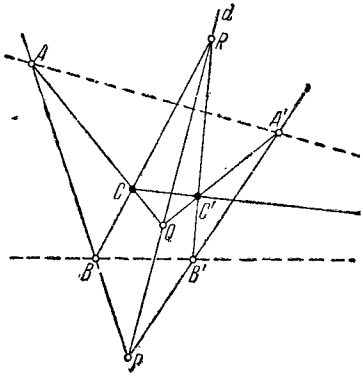

Рис. 42.

Эту задачу удобно решать с помощью теоремы Брианшона (§ 2, стр. 17). Проведем (рис. 41) через точку A две произвольные прямые a и b, а через точку B — две произвольные прямые d и e. Обозначим через c прямую, соединяющую точку $1 \equiv a \times e$ с точкой $2 \equiv b \times q$, через f — прямую, соединяющую точки $3 \equiv b \times d$ и $4 \equiv e \times q$, через r — прямую, соединяющую точки $5 \equiv a \times f$ и $6 \equiv c \times d$.

Рассматривая шестивершинник $A54B62$, заметим, что его стороны $A5$, $4B$ и 62 проходят через точку 1, а стороны 54, $B6$ и $2A$ — через точку 3. Поэтому, согласно теореме Брианшона, прямые AB, 56 и 42, т. е. прямые AB, r и q, должны сойтись в одной точке. Следовательно, точка C пересечения прямой q с недоступной прямой AB может быть построена как пересечение прямых q и r.

Задача 3. Построить точку пересечения недоступных прямых AA' и BB'.

Пусть (рис. 42) P — точка пересечения прямых AB и $A'B'$. Проведем через эту точку произвольную прямую d и выберем на этой прямой какие-либо две точки Q и R (отличные от точки P). Если $C \equiv AQ \times BR$, а $C' \equiv A'Q \times B'R$, то прямая CC' проходит через искомую точку, как это непосредственно следует из теоремы 5 § 3 в применении к трехвершинникам ABC и $A'B'C'$.

Изменив положение прямой d или положение какой-либо из точек Q и R, можно построить таким же путем другую пару таких точек C_1 и C_1', что соединяющая их прямая также пойдет через искомую точку. После этого искомая точка строится как пересечение прямых CC' и C_1C_1'.

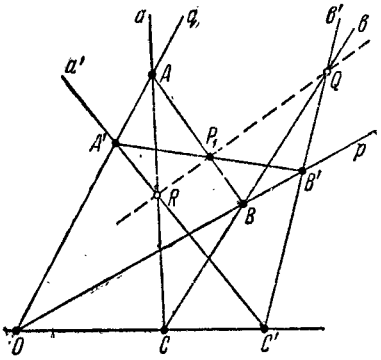

Рис. 43.

Задача 4. Построить прямую RQ, если $R(a, a')$ и $Q(b, b')$ — две недоступные точки.

Пусть C' (рис. 43) — точка пересечения прямых a' и b', C — точка пересечения прямых a и b. Возьмем на прямой CC' произвольную точку O (отличную от C и C'). Проведем через точку O две произвольные прямые p и q (отличные от прямой CC'). Пусть B и B' — точки пересечения прямой p соответственно с прямыми b и b', A и A' — точки пересечения прямой q соответственно с прямыми a и a'.

Точка $P_1 \equiv AB \times A'B'$ расположена на прямой QR, как это непосредственно вытекает из теоремы Дезарга в применении к трехвершинникам ABC и $A'B'C'$. Таким же путем, изменив положение точки O на прямой CC' или изменив прямые p и q, можно найти еще одну точку P_2 на прямой QR. Прямая P_1P_2 — искомая.

Задача 5. Даны две параллельные прямые a и b и точка Q. Провести через точку Q прямую, параллельную данным прямым, пользуясь только линейкой.

Возьмем (рис. 44) произвольно точки A и D на прямой a и точки B и C на прямой b. Тогда $ABCD$ — трапеция. Строим точку F пересечения боковых сторон трапеции. Пусть M — точка пересечения прямой CQ с основанием трапеции AD. Строим точку $E \equiv DQ \times FM$ и точку $P \equiv AE \times BM$. Тогда, по следствию из теоремы 6 § 4, прямая PQ есть искомая параллель.

Следующие задачи предлагаются читателю для самостоятельного решения.

Задача 6. Через данную недоступную точку провести прямую, параллельную данной прямой.

Задача 7. Через данную точку провести прямую, параллельную данной недоступной прямой.

Задача 8. Доказать: если стороны и диагонали одного четырехугольника соответственно параллельны сторонам и диагоналям другого четырехугольника, то эти четырехугольники гомотетичны (подобно расположены).

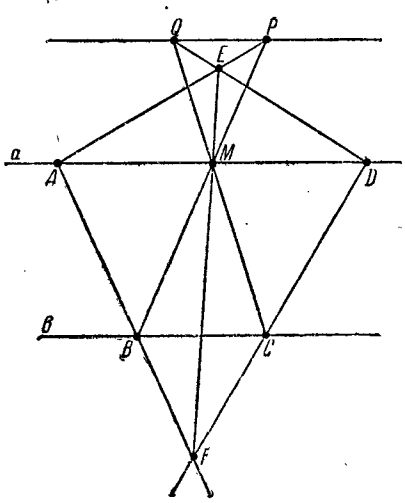

Рис. 44.

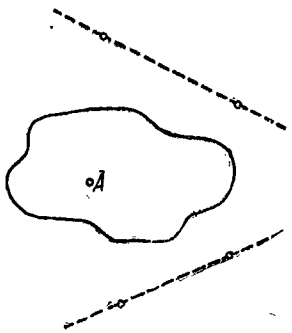

Рис. 45.

Задача 9. Доказать: если $ABCD$ и $AB'CD'$ — два параллелограмма, то прямые BB' и DD' параллельны и прямые BD' и $B'D$ параллельны.

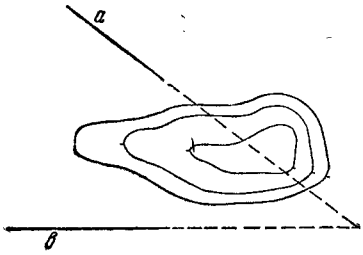

Рис. 46.

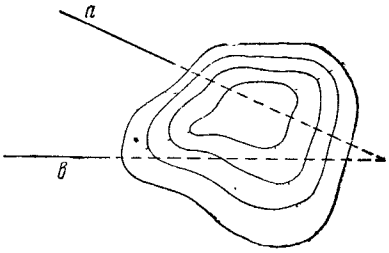

Рис. 47.

Задача 10. Установить, к каким из изложенных задач можно привести решение следующих вопросов:

1) На море отмечены буйками две прямые. Оставаясь в пределах острова, с которого можно наблюдать буйки, надо обозначить вехами прямую, проходящую через данную на острове точку A и направленную в точку пересечения прямых, обозначенных буйками (рис. 45).

2) Как найти точку пересечения прямых a и b, если на пути прямой a расположена возвышенность, не позволяющая визировать через нее (рис. 46)?

3) Решить ту же задачу в случае, когда препятствия имеются на обеих прямых (рис. 47).

4) Между мачтами A и B электропередачи (рис. 48) надо поместить еще одну мачту C. Как определить ее место, если мачты A и B разделены двумя постройками?

5) Не сходя с суши, определить, в каком месте встретятся две строящиеся линии электропередач, изображенные на рис. 49.

§ 6. ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ КОНФИГУРАЦИОННЫХ ТЕОРЕМ

Мы ознакомились с некоторыми важнейшими конфигурационными теоремами и получили представление об их возможных применениях. Естественно возникновение ряда вопросов: можно ли получить какие-либо новые конфигурационные теоремы? много ли существует конфигурационных теорем? существуют ли конфигурационные теоремы, помимо тех, которые можно вывести из теорем Паппа — Паскаля и Дезарга? нет ли общего метода для открытия конфигурационных свойств плоскости? Эти вопросы уводят нас в новую область исследований. Многие ее результаты получены в последние два десятилетия. Ряд вопросов все еще ждет своего разрешения. Попытаемся дать хотя бы некоторое общее представление об этой части математики.

Еще в XVII веке в поисках общего метода геометрических исследований математики пришли к идее координат, позволяющей применить к геометрии алгебраические, вычислительные методы. В ходе развития этой идеи в начале XX века была вскрыта важная роль теорем Паппа — Паскаля и Дезарга в установлении связи геометрии с алгеброй и арифметикой. Наконец, исследования последних 15 лет установили, что каждая конфигурационная теорема может быть «переведена на алгебраический язык» в форме некоторого тождества и, наоборот, каждое тождество можно геометрически представить как некоторую конфигурационную теорему.

Обратимся к простейшему примеру.

Пусть даны два произвольных числа a и b. Выбрав некоторый отрезок в качестве единицы, изобразим эти числа в виде отрезков. Тогда произведение ab данных чисел тоже можно представить в виде отрезка. Этот отрезок можно построить

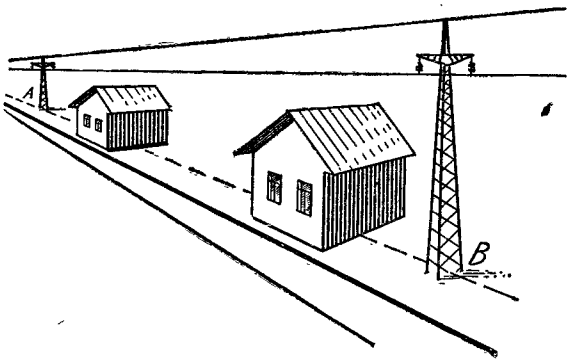

Рис. 48.

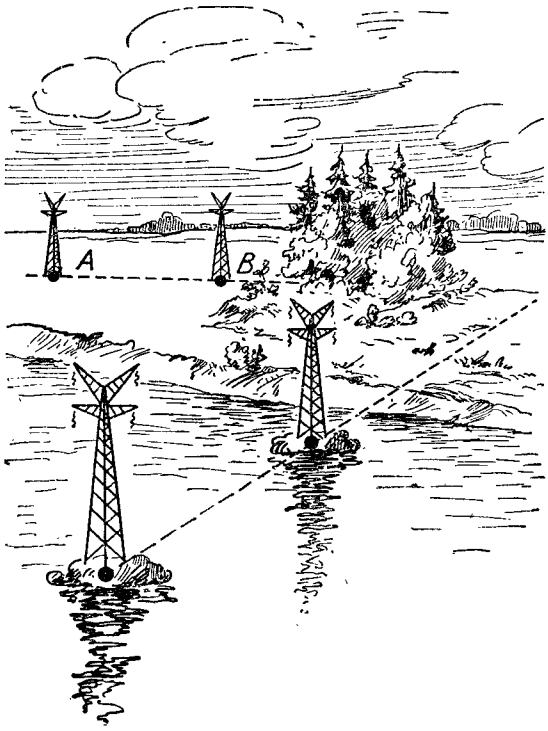

Рис. 49.

следующим образом (рис. 50). Возьмем произвольный угол MON. На стороне OM отложим первый сомножитель, т. е. отрезок $OA = a$, а на другой стороне ON — отрезки $OB = b$ и $OE = 1$. Проведем прямую $BB_1 \parallel AE$. Тогда $OB_1 : OB = OA : OE$, т. е. $OB_1 : b = a : 1$. Отсюда $OB_1 = ab$. Далее по такому же правилу построим произведение ba. Для этого отложим на стороне OM первый сомножитель, т. е. отрезок $OB' = b$, а на стороне ON — второй сомножитель, т. е. отрезок $OA' = a$. Проведем $A'B_2 \parallel B'E$. Тогда отрезок OB_2 представит произведение ba. По построению $AE \parallel BB_1$. Из леммы 1 на стр. 14 легко вывести, что $AA' \parallel BB'$. Поэтому к шестивершиннику $AA'B_1BB'E$ можно применить теорему Паппа — Паскаля. Следовательно, $A'B_1 \parallel B'E$. Однако по построению $A'B_2 \parallel B'E$. Значит, если справедлива теорема Паппа — Паскаля, то точка B_2 совпадает с точкой B_1, т. е. имеет место равенство $OB_1 = OB_2$ или, что то же самое, $ab = ba$. Таким образом, «на алгебраическом языке» теорема Паппа — Паскаля означает переместительный закон умножения.

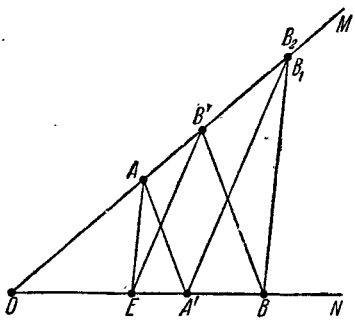

Рис. 50.

При более глубоком изучении вопроса и после приобретения необходимых навыков можно научиться представлять различные алгебраические тождества в виде конфигурационных теорем. Так как тождеств можно образовать сколько угодно, то таким путем можно построить сколько угодно конфигурационных теорем. При этом количество точек и прямых, о которых говорится в теореме, можно сделать произвольно большим.

По мере усложнения конфигурационной теоремы ее словесная формулировка становится все более затруднительной. Поэтому для записи сложных конфигурационных теорем обычно пользуются универсальной условной схемой. Познакомимся с этой схемой на примере теоремы Паппа — Паскаля. Согласно условию этой теоремы (см. стр. 13), точки A, C и E располагаются на одной прямой. Чтобы выразить это условие на схеме, эти точки записываются в строку:

$$ACE.$$

Такое же условие налагается на точки B, D и F, и поэтому

появляется еще одна строка схемы:

$$BDF.$$

Далее, точка P образуется в пересечении прямых AB и DE. Это построение на схеме изображается так:

$$\left.\begin{matrix} AB \\ DE \end{matrix}\right\} P.$$

Построение точек Q и R изображается таким же способом. Полная схематическая запись теоремы Паппа — Паскаля имеет следующий вид:

$$\begin{matrix} ACE \\ BDF \\ \left.\begin{matrix} AB \\ DE \end{matrix}\right\} P \\ \left.\begin{matrix} BC \\ EF \end{matrix}\right\} Q \\ \left.\begin{matrix} CD \\ AF \end{matrix}\right\} R \\ \hline PQR. \end{matrix}$$

Последняя запись под чертой выражает заключение теоремы: «точки P, Q и R лежат на одной прямой».

Вот пример схематической записи более сложной конфигурационной теоремы, в которой говорится о 14 точках (они обозначены цифрами) и 16 прямых (они возникают в ходе построения):

$$\begin{matrix} \left.\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{matrix}\right\} 7 \\ \left.\begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{matrix}\right\} 8 \\ \left.\begin{matrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{matrix}\right\} 9 \\ \left.\begin{matrix} 2 & 9 \\ 7 & 8 \end{matrix}\right\} 10 \\ \left.\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 10 \end{matrix}\right\} 11 \\ \left.\begin{matrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{matrix}\right\} 12 \\ \left.\begin{matrix} 6 & 7 \\ 5 & 11 \end{matrix}\right\} 13 \\ \left.\begin{matrix} 1 & 5 \\ 7 & 12 \end{matrix}\right\} 14 \\ \hline 2 \quad 13 \quad 14 \end{matrix}$$

Теорема эта представлена графически на рис. 51. Вся фигура возникает из шести произвольно выбранных точек *1*, *2*, *3*, *4*,

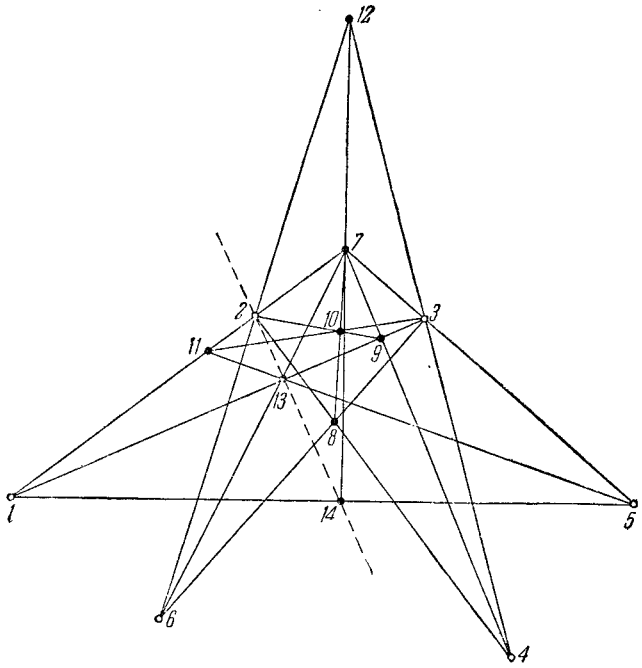

Рис. 51.

5 и *6*. Сама теорема геометрически представляет тождество

$$a(bc) + d = (ab)c + d.$$

Трудно представить себе, чтобы такую конфигурационную теорему можно было получить путем непосредственного геометрического рассуждения, без привлечения ее алгебраического содержания.

В заключение заметим, что как ни велико разнообразие конфигурационных теорем, какими бы сложными они ни были, все они (и это строго доказано) могут быть выведены из теоремы Паппа — Паскаля. Вспомним, что для теоремы Дезарга такое рассуждение было проведено на стр. 23.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аргунов Б. И., Конфигурационные постулаты и их алгебраические эквиваленты, Матем. сб. **26** (1950), 425—456.

2. Гильберт Д. и Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

3. Курант Р. и Роббинс Г., Что такое математика, М.—Л., Гостехиздат, 1947.

4. Скорняков Л. А., Проективные плоскости, УМН **VI**, вып. 6 (1951), 112—154.

5. Цюльке П., Геометрические построения на ограниченном куске плоскости, М.—Л., ОНТИ, 1935.

6. Четверухин Н. Ф., Проективная геометрия, М., Учпедгиз, 1953.

7. Pickert G., Projektive Ebenen, Springer, Berlin, 1955.

Аргунов Борис Иванович
и *Скорняков Лев Анатольевич*
Конфигурационные теоремы.

Редактор *А. Ф. Лапко.*

Технический редактор *С. Н. Ахламов.*
Корректор *С. А. Мозгалевская.*

Сдано в набор 24/VIII 1957 г. Подписано к печати 6 XI 1957 г. Бумага 84×108$^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 1,25. Условн. печ. л. 2,05. Уч.-изд. л. 2,06. Тираж 20 000 экз. Т-10338. Цена книги 60 коп. Заказ № 924.

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Московского городского Совнархоза.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

2269 30
Цена 60 коп.
3 ... ціна
— карб. ... 06 коп.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.
Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.
Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.
Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.
Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.
Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.
Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.
Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболические функции.
Вып. 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование?
Вып. 18. **Г. М. Миракьян.** Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.
Вып. 20. **А. М. Лопшиц.** Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. **Л. И. Головина и И. М. Яглом.** Индукция в геометрии.
Вып. 22. **Б. Г. Болтянский.** Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. **А. С. Смогоржевский.** О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. **Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков.** Конфигурационные теоремы.